حل ورقة عمل التابع اللوغاريتمي (1)

السؤال الأول: أوجد مجموعة تعريف التوابع الآتية:

$\boxed{1}$ $f(x) = \ln x^2$

$x^2 > 0$

$D_f = R/\{0\}$

$\boxed{2}$ $f(x) = \ln^2 x$

$x > 0$

$D_f =]0, +\infty[$

$\boxed{3}$ $f(x) = \ln(x^2 - x - 42)$

$x^2 - x - 42 > 0$

$(x-7)(x+6) = 0$

إما $x = 7$ أو $x = -6$

x	$-\infty$		-6		7		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة		محققة		غير محققة		محققة	

$D_f =]-\infty, -6[\cup]7, +\infty[$

$\boxed{4}$ $f(x) = \ln x^3$

$x^3 > 0$

$D_f =]0, +\infty[$

$\boxed{5}$ $f(x) = \ln(x^2 - x) + \ln(x+1)$

$x^2 - x > 0$ $\quad$ $x + 1 > 0$

$x(x-1) > 0$ $\quad$ $x > -1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
المعادلة		$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة		محققة		غير محققة		محققة	

$D_1 =]-\infty\,, 0[\cup]1\,, +\infty[$

$D = D_1 \cap D_2$

$\Rightarrow \quad D =]-1\,, 0[\cup]1\,, +\infty[$

$\boxed{6}$ $f(x) = \ln[\ln x]$

$\ln(x) > 0$

$\ln(x) > \ln(1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x > 1}$

$x \in]1\,, +\infty[$

$D =]1\,, +\infty[$

السؤال الثاني: بسط العبارات الآتية:

$\boxed{1}$ $E = \ln \sqrt[3]{e} + \ln \sqrt[3]{e^2}$

$$= \ln(e)^{\frac{1}{3}} + \ln(e)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\ln e + \frac{2}{3}\ln e = 1$$

$\boxed{2}$ $D = \ln\left[\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\right]$

$$= \ln(9 - 8) = \ln(1) = 0$$

$\boxed{3}$ $G = \ln 144 - \ln 4 + \ln \frac{1}{12} - \ln 3$

$$G = \ln(12)^2 - \ln(2)^2 - \ln 12 - \ln 3$$

$$= \ln(12) - 2\ln 2 - \ln 3$$

$$= 2\ln 2 + \ln 3 - 2\ln 2 - \ln 3 = 0$$

$\boxed{4}$ $H = \ln 25 - \ln\sqrt{45} + \ln\sqrt{15} - \ln\sqrt{105} + \ln\sqrt{63}$

$$= -\ln(5)^2 - \frac{1}{2}\ln(9\times 5) + \frac{1}{2}\ln(5\times 3)$$

$$-\frac{1}{2}\ln(21\times 5) + \frac{1}{2}\ln(9\times 7)$$

$$= 2\ln 5 - \frac{1}{2}\ln(3)^2 - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln 3$$

$$-\frac{1}{2}\ln 7 - \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{2}\ln(3)^2 + \frac{1}{2}\ln 7$$

$$= \frac{3}{2}\ln 5$$

السؤال الثالث: بفرض $A = 5^{\frac{-1}{\ln 5}}$, $B = 5^{\frac{1}{\ln 5}}$ **أثبت أن** $A + B = \frac{e^2+1}{e}$

$$A + B = 5^{-\frac{1}{\ln 5}} + 5^{\frac{1}{\ln 5}}$$

$$= e^{-\frac{1}{\ln 5}.\ln 5} + e^{\frac{1}{\ln 5}.\ln 5} = e^{-1} + e^{1} = \frac{1}{e} + e \quad \Rightarrow \boxed{A + B = \frac{1+e^2}{e}}$$

....

السؤال الرابع: أوجد حل كل معادلة أو متراجحة فيما يأتي:

$\boxed{1}$ $\ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x}\right) < \ln(x+1) + \ln(x-1)$

شرط الحل:

$x^2 > 0$, $D_1 = R^*$

$\frac{1}{x} > 0$, $x > 0$, $D_2 =]0, +\infty[$

$x > -1$, $D_3 =]-1, +\infty[$

$x > 1$, $D_4 =]1, +\infty[$

$$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 =]1, +\infty[$$

نحل المتراجحة :

$$\ln\left(x^2\left(\frac{1}{x}\right)\right) < \ln\big((x+1)(x-1)\big)$$

$$\ln x < \ln\big((x+1)(x-1)\big)$$

$$x < (x+1)(x-1)$$

$$x < x^2 - 1$$

$$0 < x^2 - x - 1$$

$$\Delta = 1 - 4(1)(-1) = 5 > 0$$

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
المعادلة		$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة		محققة		غير محققة		محققة	

$$x \in \left]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$$

$$S = \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$$

....

$\boxed{2}$ $\mathbf{\ln(x^2 - 3x) \geq 2\ln(6 - x)}$

شرط الحل: $6 - x > 0$

$6 > x$

$x \in]-\infty, 6[$

نحل المتراجحة: $x^2 - 3x \geq (6 - x)^2$

$x^2 - 3x \geq 36 - 12x + x^2$

$0 \geq 36 - 9x \quad \Longrightarrow \quad 0 \geq 9(4 - x)$

$0 \geq 4 - x \quad \Longrightarrow \quad x \geq 4$

$x \in [4, +\infty[\quad \Longrightarrow \quad S = [4,6[$

....

$\boxed{3}$ $\mathbf{3\ln(x + 1) = \ln x + \ln(x^2 - 1)}$

شرط الحل

$x + 1 > 0$

$x > -1$

$D_1 =]-1, +\infty[$

$x > 0$

$D_2 =]0, +\infty[$

$x^2 - 1 > 0$

$x^2 - 1 = 0$

إما $x = 1$, أو $x = -1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
المعادلة		$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة		محققة		غير محققة		محققة	

$D_3 =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 =]1, +\infty[$

نحل المعادلة: $(x + 1)^3 = x(x^2 - 1)$

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 - x$

$3x^2 + 4x + 1 = 0$

$\Delta = 16 - 4(3)(1) = 4$

$x_1 = -1 \notin D \quad , \quad x_2 = -\frac{1}{3} \notin D \quad \Longrightarrow \quad S = \{\emptyset\}$ المعادلة مستحيلة الحل

....

$\boxed{4}$ $\ln(x^2 - 3x) \leq \ln x^2$

شرط الحل: $x^2 - 3x > 0$

$x(x-3) > 0$

$x(x-3) = 0$

إما $x = 0$, أو $x = 3$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
المعادلة		$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة		محققة		غير محققة		محققة	

$$D =]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$$

نحل المتراجحة: $x^2 - 3x \leq x^2$

$-3x \leq 0 \implies x \geq 0$

$x \in [0, +\infty[\implies S =]3, +\infty[$

....

السؤال الرابع: أثبت أنه لأياً كان $x \in R$ تتحقق المساواة الآتية:

$$\mathbf{2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = (x-2)(2x^2 + x - 15)}$$

ثم استفيد من هذه المساواة في حل المعادلة الآتية: $\mathbf{2\ln x + \ln(2x-3) = \ln(17x - 30)}$

$*\quad L_2 = (x-2)(2x^2 + x - 15)$

$= 2x^3 + x^2 - 15x - 4x^2 - 2x + 30$ بالنشر

$= 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ بجمع الحدود المتشابه

$*\ 2\ln x + \ln(2x-3) = \ln(17x - 30)$

شرط الحل : $x > 0 \qquad D_1 =]0, +\infty[$

$2x - 3 > 0 \qquad D_2 = \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$

$17x - 30 > 0 \qquad D_3 = \left]\frac{30}{17}, +\infty\right[$

$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \left]\frac{30}{17}, +\infty\right[$

$2\ln x + \ln(2x-3) = \ln(17x - 30)$

$\ln x^2 + \ln(2x-3) = \ln(17x - 30)$

$\ln\left(x^2(2x-3)\right) = \ln(17x - 30)$

$2x^3 - 3x^2 = 17x - 30$

$2x^3 - 3x^2 - 17x - 30 = 0$

$(x-2)(2x^2 + x - 15) = 0$ من الطلب الأول

إما $x - 2 = 0 \implies x = 2 \in D$

أو $2x^2 + x - 15 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(2)(-15) = 121 \implies \sqrt{\Delta} = 11$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 11}{4} = -3 \notin D$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 11}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \in D \implies S = \left\{2, \frac{5}{2}\right\}$$